булентности, и некоторыми из них можно было бы воспользоваться для аппроксимации результатов прямых численных расчетов. Однако удобно использовать какой-либо единый и по возможности простой подход к построению приближенных теорий применительно к различным задачам. Именно такой единый подход и используется ниже. Следует отметить, что он не является принципиально новым; речь идет только об изложении различных идей, используемых в полуэмпирических теориях, с единой точки зрения.

6.2. Принцип «локального подобия» в теории турбулентного переноса

В гидродинамике и в теории тепломассообмена (как и в других областях науки) широко используются методы теории подобия. В частности, опытные данные по теплообмену или массообмену, как правило, представляются в безразмерной форме (в форме связи между «критериями подобия»), допускающей распространение полученных данных на другие случаи, подобные исследованному. Такой подход играет и сейчас важную роль в технике, однако для современных сложных технических устройств возможности достаточно точного моделирования часто очень ограничены. Это определяется неоднородностью свойств среды, во многих случаях сложностью и разнообразием геометрических характеристик потока, действием переменных по объему сил, влиянием лучистого теплообмена при высоких температурах и пр. Реальное физическое моделирование целесообразно дополнить (или даже заменить) математическим моделированием, в котором учитываются все указанные факторы. Для этого нужно уметь определять характеристики турбулентного переноса (количества движения, энергии, массы), так как движение сред в технических устройствах, как правило, бывает турбулентным.

Фактически во всех полуэмпирических теориях турбулентности предполагается (явно или неявно) существование некоторого внутреннего равновесия в структуре турбулентности. Действительно, использование наиболее простой формулы типа формулы Прандтля для турбулентного трения равнозначно предположению о том, что характеристики турбулентности в каждой точке потока целиком определяются только локальными характеристиками осредненного течения вблизи этой же точки. Во многих случаях такая гипотеза оказывается правильной.

В более сложных полуэмпирических теориях при применении дифференциальных уравнений для компонент тензора напряжений Рейнольдса и для «масштаба турбулентности» (или для скорости диссипации энергии турбулентности) записываются различные приближенные выражения для отдельных членов этих уравнений (содержащие эмпирические коэффициенты). Само существование определенной формы этих выражений и часто делающееся предположение о постоянстве указанных эмпирических коэффициентов (т. е. о том, что это «эмпирические константы», как часто пишут) возможно только при существовании некоторого, «равновесного» при рассматриваемых условиях, спектра турбулентности. Для другого спектра форма выражений и тем более значения «констант» могут сильно измениться.

Успешность применения полуэмпирических теорий подтверждает правильность используемого в них подхода. Физической причиной этого является то обстоятельство, что процессы обмена энергией между турбулентностью и осредненным течением протекают медленнее, чем обмен энергией между турбулентными вихрями; для более мелких вихрей этот процесс протекает быстрее, чем для крупномасштабных пульсаций.

Гипотезу о существовании во многих случаях «локально равновесной» структуры турбулентности удобно принять в качестве основы для некоторой приближенной теории «локального подобия» в турбулентном переносе. Такой подход к проблеме излагается в [11]; в настоящей монографии он дополнительно развивается. Эта теория локального подобия, как и теория подобия вообще, предназначена прежде всего для определения формы, в которой наиболее удобно обрабатывать опытные данные или данные численного эксперимента. Ниже излагаются также некоторые методы «теоретического» (очень приближенно) получения формул для локальных характеристик турбулентного переноса.

Вся теория развивается только применительно к двумерным (по осредненным характеристикам) течениям типа пограничного слоя (пристеночного или струйного). Это охватывает большое число практически важных задач. Задачи с более сложной геометрией требуют развития новых полуэмпирических теорий или непосредственного применения прямого численного моделирования.

Поясним изложенное более конкретно. В уравнения для осредненного течения в пограничном слое входят величины (см.: [11] $\langle \rho' v' \rangle$, $\langle u' v' \rangle$, $\langle T' v' \rangle$, $\langle c' v' \rangle$ (последнее в случае неоднокомпонентной среды; c — концентрация одного из компонентов). Здесь v' — пульсационная составляющая скорости v поперек пограничного слоя (вдоль оси y, ось x всегда будет направлена вдоль основного течения в пограничном слое). Все перечисленные величины не определяются из уравнений для осредненного течения и требуют дополнительных соотношений. В данном случае $\langle \rho' v' \rangle$ описывает турбулентный перенос массы поперек пограничного слоя; $\rho \langle u' v' \rangle$ представляет собой турбулентное напряжение силы трения; $c_p \rho \langle T' v' \rangle$ — турбулентный удельный тепловой поток (в однокомпонентном случае); $\rho \langle c' v' \rangle$ — это плотность турбулентного переноса массы компонента смеси с концентрацией c («турбулентная диффузия»)[1];

[1] В случае магнитодинамического течения в уравнения входят и другие величины, требующие приближенного определения (см. соответствующий раздел ниже).

Представим, как это часто делается, указанные величины в следующем виде:

$$-\langle u'v'\rangle = \nu_{\text{т}}\partial u/\partial y, \quad (2.1)$$

$$-\langle T'v'\rangle \approx a_{\text{т}}\partial T/\partial y, \quad (2.2)$$

$$-\langle c'v'\rangle = D_{\text{т}}\partial c/\partial y, \quad (2.3)$$

$$\langle \rho'v'\rangle = -\overline{D}_{\text{т}}\partial\rho/\partial y. \quad (2.4)$$

Здесь u, T, c, ρ в правой части — осредненные значения соответствующих величин (продольной скорости, т. е. скорости вдоль оси x в пограничном слое; температуры; концентрации компонента смеси и плотности среды); координата y для пристеночного пограничного слоя направлена от стенки в поток; $\nu_{\text{т}}$, $a_{\text{т}}$, $D_{\text{т}}$, $\overline{D}_{\text{т}}$ — турбулентные коэффициенты переноса (соответственно турбулентные коэффициенты трения, температуропроводности, диффузии и переноса массы).

Выражения (2.1)—(2.4) справедливы, конечно, не всегда. Строго говоря, для этого необходимо, чтобы в каждой точке турбулентность определялась равновесием между ее возникновением из-за взаимодействия пульсаций с осредненным течением и диссипацией энергии. Если в балансе энергии турбулентности существенны члены с переносом энергии в пространстве (конвективным или диффузионным), то формулы (2.1)—(2.4) становятся неточными. В частности, могут существовать места в потоке, где $\partial u/\partial y = 0$, а $\langle u'v'\rangle \neq 0$. Однако смещение друг относительно друга точек, где $\partial u/\partial y = 0$ и где $\langle u'v'\rangle = 0$, получается незначительным, и использование формул (2.1)—(2.4) не приводит к большим ошибкам при расчете общей картины течения. Это и позволяет нам использовать далее формулы (2.1)—(2.4) для приближенных расчетов во всех случаях.

Таким образом, проблема замыкания уравнений для осредненного течения сводится к задаче определения турбулентных коэффициентов переноса $\nu_{\text{т}}$, $a_{\text{т}}$, $D_{\text{т}}$ и $\overline{D}_{\text{т}}$. Принимается следующая гипотеза (которая и составляет основу «принципа локального подобия»): величины $\nu_{\text{т}}$, $a_{\text{т}}$, $D_{\text{т}}$ и $\overline{D}_{\text{т}}$ в каждой точке пограничного слоя зависят только от свойств среды в этой же точке, от локального значения масштаба турбулентности, от энергии турбулентности $E = {}^1/_2\langle u_i'u_i'\rangle$ и от некоторых характеристик поля осредненного течения и объемных сил в этой точке.

Для равновесной турбулентности (когда производство энергии турбулентности равно ее диссипации в каждой точке) величина E не должна входить в число аргументов, так как она сама определяется теми же параметрами течения, что и $\nu_{\text{т}}$, $a_{\text{т}}$, $D_{\text{т}}$ и $\overline{D}_{\text{т}}$. Введение E в число аргументов сделано с целью приближенного учета «неравновесности».

Предполагается, что «масштаб турбулентности» l может быть определен по чисто геометрической формуле вида

$$l = l\,(y, \delta), \quad (2.5)$$

где y — координата поперек пограничного слоя; δ — толщина слоя. Это предположение (часто принимаемое) требует дополнительных пояснений (см. также: [11]). Если баланс энергии турбулентности сводится к равновесию между ее производством и диссипацией и если допустить, что в потоке существует возмущения различных масштабов, то легко прийти к выводу, что максимальная энергия турбулентных пульсаций будет сосредоточена в наиболее крупных вихрях, размер которых может ограничиваться только расстоянием до стенки y или (для струйного течения) шириной пограничного слоя δ. Действительно, при использовании любых разумных выражений для скорости генерации турбулентности и для диссипации энергии и при варьировании l получается, что при возрастании l скорость производства энергии турбулентности увеличивается, а скорость диссипации энергии уменьшается. В связи со сказанным можно ожидать, что для указанной «равновесной» турбулентности масштаб l определяется формулой вида (2.5), причем для пристеночного пограничного слоя вблизи стенки $l \sim y$, а для струйного пограничного слоя $l < \delta$, и не зависит (или слабо зависит) от y.

Если в балансе энергии турбулентности существенны и другие статьи (конвективный перенос, «диффузия»), то формула вида (2.5) не должна быть, вообще говоря, справедлива. Однако универсальность и точность описанных в литературе дифференциальных уравнений для l еще далеко не подтверждена (см. также замечание по поводу этих уравнений в разд. 5.16), а поскольку имеется положительный опыт применения формулы (2.5), то для приближенных расчетов далее будет использована формула вида (2.5) во всех случаях. Если она окажется неточной для некоторых видов течений, то для них должна развиваться новая приближенная теория или непосредственно использоваться результаты прямого численного моделирования (где величина l определяется в ходе расчетов).

Выражения для $\nu_т$, $a_т$, $D_т$ и $\overline{D}_т$, представляемые в безразмерном виде, и являются теми локальными универсальными (т. е. пригодными для каждой точки, в том числе при переменных свойствах среды и переменном поле объемных сил) соотношениями подобия, которые совместно с уравнениями для осредненного течения, уравнением для E и формулами (2.1)—(2.4) составляют замкнутую систему уравнений для описания осредненного течения в пограничном слое (решаемую численно). Формулы для $\nu_т$, $a_т D_т$ и $\overline{D}_т$ могут быть получены «теоретически» («полуэмпирическим» способом) или чисто экспериментально (на основе реального физического или численного эксперимента). В последнем случае теоретически (на основе теории подобия) определяется только перечень безразмерных параметров, между которыми должна находиться связь на основе опыта.

Конкретный вид формул для $\nu_т$, $a_т$, $D_т$ и $\overline{D}_т$ в различных случаях рассматривается в следующих главах. Здесь мы дадим только некоторые пояснения.

В соответствии со сказанным выражение, например, для $\nu_т$ должно в случае «равновесной» турбулентности иметь такой вид (в размерной форме):

$$\nu_т = \nu_т (\rho, \nu, l, \partial u/\partial y, f^{(k)}), \tag{2.6}$$

где ρ, ν — величины плотности и вязкости среды в рассматриваемой точке; величины l и $\partial u/\partial y$ также относятся к этой же точке; $f^{(k)}$ (где может быть несколько значений k) — локальные характеристики поля (или полей) объемных сил.

Если объемных сил нет, то аргументы $f^{(k)}$ в (2.6), естественно, отсутствуют. Вдали от стенки турбулентность слабо зависит от вязкости среды, и величину ν из числа аргументов можно исключить. Тогда получается (при $f^{(k)} = 0$):

$$\nu_т = \nu_т (\rho, l\partial u/\partial y). \tag{2.7}$$

Так как из оставшихся аргументов ни одной безразмерной комбинации составить нельзя, то с точностью до постоянного коэффициента получается

$$\nu_т \sim l^2\partial u/\partial y. \tag{2.8}$$

С учетом (2.1) отсюда следует

$$-\langle u'v'\rangle \sim l^2 (\partial u/\partial y)^2 \tag{2.9}$$

— это формула Прандтля для турбулентного трения.

Вблизи стенки, где аргумент ν опустить нельзя, получается [при $f^{(k)} = 0$ в (2.6)]:

$$\frac{\nu_т}{\nu} = f\left(\frac{l^2\partial u/\partial y}{\nu}\right) \tag{2.10}$$

— это также хорошо известная зависимость.

Если объемные силы представляют собой только силы инерции, связанные с ускорением жидкости или газа в продольном направлении, то в качестве $f^{(k)}$ в (2.6) может быть включен аргумент $\partial u/\partial x$. Тогда вместо (2.9) получается

$$-\langle u'v'\rangle = = \left(\frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y}\right) l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \tag{2.11}$$

а вместо (2.10):

$$\frac{\nu_т}{\nu} = f\left(\frac{l^2\partial u/\partial y}{\nu}, \frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y}\right). \tag{2.12}$$

Для стратифицированной среды в поле силы тяжести, направленном поперек пограничного слоя, $f^{(k)} = g\partial\rho/\partial y$ (g — ускорение силы тяжести). Тогда вдали от стенки, где можно пренебречь влиянием вязкости, из (2.6) и (2.1) вместо (2.9) получается:

$$-\langle u'v'\rangle = f\left(\frac{g}{\rho}\,\frac{\partial\rho/\partial y}{(\partial u/\partial y)^2}\right) l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2. \tag{2.13}$$

Вблизи стенки

$$\frac{\nu_{т}}{\nu}=\varphi\left[\frac{\partial\rho/\partial y}{(\partial u/\partial y)^2},\frac{l^2\partial u/\partial y}{\nu}\right]. \tag{2.14}$$

Если $\partial u/\partial y=0$, а $g\partial\rho/\partial y\neq 0$ (слой свободной конвекции), то турбулентность может генерироваться только действием архимедовых сил (при неустойчивой стратификации). Вдали от стенки, когда ν в (2.6) можно пренебречь, из остающихся аргументов нельзя составить ни одной безразмерной комбинации и с точностью до постоянного множителя получается

$$\nu_{т}\sim l^2\sqrt{\left|\frac{g}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}\right|}. \tag{2.15}$$

Вблизи стенки

$$\frac{\nu_{т}}{\nu}=f\left(\frac{l^4}{\nu^2}\frac{g}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}\right). \tag{2.16}$$

При течении электропроводной среды в магнитном поле в качестве $f^{(k)}$ может быть принята следующая величина [11] (в гауссовой системе единиц измерений):

$$f^{(k)}=\sigma H^2/c^2, \tag{2.17}$$

где σ — удельная электропроводность среды; H — напряженность магнитного поля; c — скорость света в вакууме. В этом случае вместо (2.10) получается

$$\frac{\nu_{т}}{\nu}=f\left(\frac{l^2\partial u/\partial y}{\nu},\frac{\sigma H^2}{\rho c^2\partial u/\partial y}\right). \tag{2.18}$$

Вдали от стенки, где действием вязкости можно пренебречь имеем [вместо (2.9)]

$$-\langle u'v'\rangle=\psi\left(\frac{\sigma H^2}{\rho c^2\partial u/\partial y}\right)l^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2. \tag{2.19}$$

Конкретный вид функций f и ψ в (2.18) и (2.19) зависит, конечно, от ориентации магнитного поля относительно направления основного течения среды. Для случая продольного магнитного поля эти функции приведены в [11].

Общий вид выражений для $a_{т}$, $D_{т}$ и $\overline{D}_{т}$ (в размерной форме) отличается от (2.6) в случае «равновесной» турбулентности только присутствием в качестве аргументов дополнительных свойств среды: в выражение для $a_{т}$ должны входить в качестве аргументов (кроме перечисленных в (2.6) величин) также коэффициент температуропроводности среды a и удельная теплоемкость c_p; в выражения типа (2.6) для $D_{т}$ аргумент D (коэффициент диффузии); в выражение для $\overline{D}_{т}$ могут входить все эти параметры. Следовательно, в число безразмерных аргументов входят числа $\mathrm{Pr}=\nu/a$ и Шмидта (т. е. диффузионное число Прандтля $\mathrm{Pr}_{д}=$ $=\nu/D$).